ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΤΟΠΟΛΟΓΙΑ

4ο φυλλάδιο ασκήσεων

1) Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και $A \subseteq X$. Να δείξετε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:
(i) Για κάθε οικογένεια ανοικτών συνόλων $(G_i)_{i\in I}$ του X με $A \subseteq \bigcup_{i\in I} G_i$ υπάρχει $J \subseteq I$ με J πεπερασμένο, ώστε $A \subseteq \bigcup_{i\in J} G_i$.
(ii) Ο μετρικός χώρος (A,ρ_A), όπου ρ_A η σχετική μετρική, είναι συμπαγής.

2) Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και K ένα συμπαγές μη κενό υποσύνολο του X. Δείξτε ότι υπάρχουν $x_0, y_0 \in X$ ώστε $\rho(x_0,y_0) = \mathrm{diam}(K)$.

3) Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και K, Λ δυο συμπαγή μη κενά υποσύνολα του X. Δείξτε ότι υπάρχουν $x_0 \in K$ και $y_0 \in \Lambda$ ώστε $\rho(x_0,y_0) = \rho(K,\Lambda)$.

4) Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος, K ένα συμπαγές μη κενό υποσύνολο του X και F ένα κλειστό μη κενό υποσύνολο του X ώστε $K \cap F = \emptyset$. Δείξτε ότι $\rho(K,F) > 0$. [Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε απαγωγή σε άτοπο, και κάνετε χρήση ακολουθιών.]

5) α) Δώστε ένα παράδειγμα δυο μη κενών κλειστών και ξένων υποσυνόλων A, B του $\mathbb{R}^2$ ώστε $\rho(A,B) = 0$.
β) Κάντε το ίδιο για υποσύνολα του $\mathbb{R}$.
[Σημείωση: Τα παραδείγματα αυτά δείχνουν ότι στις προηγούμενες δύο ασκήσεις δεν μπορούν τα συμπαγή να αντικατασταθούν από κλειστά.]

6) Δώστε παράδειγμα (σε κατάλληλο μετρικό χώρο) παραδείγματος δύο ξένων συνόλων K, F ώστε K συμπαγές, F κλειστό, ώστε να μην υπάρχουν $x \in K$ και $y \in F$ με $\rho(x,y) = \rho(K,F)$. [Υπόδειξη: Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το μετρικό χώρο της τελευταίας άσκησης στο Φυλλάδιο 3.]
[Σημείωση: Το παράδειγμα αυτό δείχνει ότι το συμπέρασμα της άσκησης 3) δεν ισχύει αν εξασθενήσουμε την υπόθεση ότι τα δύο σύνολα είναι συμπαγή, θεωρώντας ένα συμπαγές και ένα κλειστό.]

7) Έστω (X,ρ) ένας συμπαγής μετρικός χώρος, $(F_i)_{i\in I}$ μια οικογένεια κλειστών υποσυνόλων του X με την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής και V ένα ανοικτό υποσύνολο του X ώστε $\bigcap_{i\in I} F_i \subseteq V$. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα πεπερασμένο υποσύνολο J του I ώστε $\bigcap_{i\in J} F_i \subseteq V$. [Υπόδειξη: Υποθέτοντας ότι δεν ισχύει το συμπέρασμα, δείξτε ότι η οικογένεια κλειστών συνόλων $\Big(F_i \cap (X \setminus V)\Big)_{i\in I}$ έχει την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής. Αυτό οδηγεί εύκολα σε άτοπο.]